

# 船舶限制水域航行岸壁效应数值模拟

孟庆杰, 万德成

(上海交通大学, 船舶海洋与建筑工程学院, 海洋工程国家重点实验室, 上海 200240)

## 摘要

本文以 wigley 船型为研究对象, 采用船舶主动运动的方式, 模拟了船舶在不同宽度水域中、不同航速的静水阻力变化情况; 分析了相同航速下不同水域宽度、狭窄航道中不同航速对船舶受力的影响。考虑到需要求解船舶大幅度运动问题, 如果采用传统网格生成技术, 不仅对网格划分技术要求较高而且网格数量巨大。为避免传统网格生成技术在处理运动方面的不足, 本文采用 overset 重叠网格技术来处理船舶的大幅度运动。计算结果表明: 同一岸壁宽度情况下, 随着傅如德数增大, 船舶静水阻力曲线震荡频率与震荡幅度均呈现减小趋势。以  $B=0.5L_{pp}$  为例,  $Fr=0.267$  航速下静水阻力较宽阔水域震荡幅度达 33%,  $Fr=0.4$  时, 震荡幅度为 12.5%; 相同傅如德数条件下, 随着岸壁宽度减小, 船舶受到的静水阻力振幅逐渐增大, 以  $Fr=0.4$  为例, 岸壁半宽  $B=0.5L_{pp}$  时静水阻力较宽阔水域震荡幅度为 12.5%, 岸壁半宽  $B=1.5L_{pp}$  时震荡幅度可以忽略。

**关键词:** 限制水域; 重叠网格; 岸壁效应; 粘性兴波阻力

## 1 引言

随着人类的发展与进步, 船舶的尺度越来越大。但海峡通道、江河、港口等却并未能与船体尺度实现同步增长。因此, 船舶驶入、驶离港口、海峡通道等区域的时候, 越来越明显的受到航道约束的影响。由于受到岸壁的影响, 船体兴波与岸壁反射波发生叠加, 致使船舶在限制水域航行时的水动力特点与广阔水域航行时有很大不同。国外学者对船舶在限制水域的操纵性问题做了大量细致的研究工作。

Norrbin<sup>[1]</sup>对某一邮轮模型沿三种不同岸壁航行的岸壁效应做了实验研究, 结果发现岸壁对船舶受到的横向力的首摇力矩有很大影响, 并且水深越浅、船离岸壁距离越近, 船舶受到的横向力和首摇力矩越大。Renilson et al<sup>[2]</sup>对某一船型分别沿垂直岸壁和具有 45°倾角的斜岸壁航行时所受水动力特点进行了实验研究, 结果表明对船速较低时, 垂直岸壁和斜岸壁对船体诱导的横向力均为吸力, 当船速较大, 斜岸壁对船体诱导的横向力变为推力, 且斜岸壁对船体所受的横向力与首摇力矩的影响较垂直岸壁大。Ch'ng et al<sup>[3]</sup>通过约束实验研究了限制水域中岸壁对船舶操纵运动水动力影响, 并给出了近岸航行时横向力与首摇力矩计算公式。Duffy<sup>[4]</sup>通过试验研究了单侧岸壁对船舶操纵性的影响, 分析了水深、船岸距离以及岸壁高度对近岸航行船舶受到的横向力和首摇力矩的影响, 并给出了计算横向力和首摇力矩的回归公式。Miao et al<sup>[5]</sup>基于 Dawson 方法, 计算了偏离浅窄河道中心航行船舶受到的横向力、首摇力矩和兴波波形, 并讨论了船岸距离、水深和航速对船舶水动力的影响。Lo et al<sup>[6]</sup>采用 CIP 和 MAC 方法计算了船舶在限制航道中航行的兴波波形。近年来, 国内学者也开始研究船舶在限制水域的运动问题。姚建喜<sup>[7]</sup>等人采用一阶 Rankine 源面元法计算了系列 60 船型在不同岸壁航行时受到的横向力与首摇力矩; 孔定新<sup>[8]</sup>采用势流理论讨论了船舶在受限水域的保

向性。但以上工作着重点在于船舶在限制水域中横向力以及首摇力矩的研究，对于船舶在限制水域的阻力变化情况，却鲜有文章发表。

本文以 wigley 船型为研究对象，利用现有的 CFD 代码，结合 overset 技术，采用单相 Level-set 自由面捕捉方法，以及 PISO 算法求解不可压缩 RANS 方程和 K- $\omega$  SST 湍流模型，综合考虑粘性流动与自由面，采取船舶主动运动方式，模拟并分析了船舶在不同岸壁宽度、不同傅如德数下的受力情况。

## 2 数学模型与数值方法

本文采用的单相 level-set 方法处理自由面，该方法的具体推导，应用及其验证可参阅文献<sup>[9-11]</sup>及其参考资料。

### 2.1 控制方程

本文采用无量纲化方式对船舶静水流场进行模拟计算。其控制方程可写为：

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_{eff}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

方程中所有变量都据船舶运动速度  $U_0$ ，长度  $L_{pp}$  以及水密度  $\rho$  进行无量纲化，进而得到有效雷诺数  $Re_{eff}$  以及 Froude 数：

式中，

$$\frac{1}{Re_{eff}} = \frac{1}{Re} + \gamma_t = \frac{\nu}{U_0 L} + \gamma_t \quad (3)$$

$$\Gamma_r = \frac{U_0}{\sqrt{g L}} \quad (4)$$

$\gamma_t$  为无量纲化的湍动粘度。

$$P = \frac{\sigma_{abs}}{\rho U_0^2} + \frac{\epsilon}{Fr^2} + \frac{2}{3} k \quad (5)$$

$P_{abs}$  为绝对压力值， $z$  为垂向坐标， $k$  为湍动能。

### 2.2 湍流模型

本文采用 SST k- $\omega$  两方程模型对 RANS 方程进行封闭。该模型由 Menter<sup>[12]</sup> 在 1994 年提出，由于该模型通过结合 k- $\omega$  与 k- $\epsilon$  模型，在近壁面采用 k- $\omega$  模型，远离壁面采用 k- $\epsilon$  模型，并考虑了湍流剪应力的传播，因此在模拟强逆压梯度的流场方面具有较好的精度与可信度。该模型中湍动能  $k$ ，湍流耗散率  $\omega$  以及涡粘性系数  $\gamma_i$  满足以下方程：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \left( U_j - \sigma_k \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{R_k} \nabla^2 k + S_k = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left( U_j - \sigma_\omega \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{1}{R_\omega} \nabla^2 \omega + S_\omega = 0 \quad (7)$$

式中： $R_k$ ——有效雷诺数

$R_\omega$ ——湍流产生项

$$R_k = \left( \frac{1}{1/Re + \sigma_k \gamma_c} \right) \quad (8)$$

$$R_\omega = \left( \frac{1}{1/Re + c_\omega \gamma_c} \right) \quad (9)$$

$$\gamma_c = \frac{k}{\omega} \quad (10)$$

k 与 W 方程的源项为:

$$s_k = R_k(-G + \beta' \omega k) \quad (11)$$

$$s_\omega = R_\omega \left[ -\gamma \frac{\omega}{k} G + \beta \omega^2 + 2(1 - F_2) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (12)$$

$$G = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \gamma_c \left[ (U_y + U_x)^2 + (U_z + U_x)^2 + (U_y + U_z)^2 + 2U_x^2 + 2U_y^2 + 2U_z^2 \right] \quad (13)$$

方程 (a) 中, F1 为混合函数, 用来表述两种模型的混合使用状态。使得该方法充分利用了 k-w 和 k-e 的优势。

### 2.3 自由面

本文采用的 level-set 方法是由 Sethian<sup>[13]</sup>与 Osher<sup>[14]</sup>二人首先提出的。其基本思想为设定 level-set 函数  $\phi$ , 并设定  $\phi=0$  的面为流体界面。这样, 在任何时刻我们只要求得  $\phi=0$  的等值面, 即可确定流体界面。由于该方法采用隐式的跟踪界面方法, 因此克服了以前波面追踪方法难于处理复杂物质界面以及易发生拓扑变形情况等不足, 且流体界面的法向、曲率等特征直接隐含在 Level-set 函数中, 更能精确的描述流体界面。而且, Level-set 方法不涉及坐标转换问题, 可使用的差分格式较多, 易于设计高精度格式以及向高维扩展。level-set 函数  $\phi$  在整个流场中满足连续条件, 且满足运动方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = 0 \quad (14)$$

本文采用单相 level-set 方法, 只计算水相的流场信息, 空气流动采用速度扩展方法来确定流场速度。由于本文采用的单相 level-set 方法在求解 Rans 方程的时候, 只在水相中进行, 空气中只需要布置些许网格点满足界面的跳跃条件即可, 因此该方法能够节省较多的计算资源。

## 3 Overset 网格技术

Overset 网格技术<sup>[15-16]</sup>是将复杂的流动区域分成几个几何边界相对较为简单的子区域, 各个子区域的计算网格独立生成, 彼此可能存在重叠或覆盖关系, 重叠区域流场信息通过插值进行匹配与耦合。由于 Overset 技术网格逻辑关系简单, 易于生成高质量网格, 且对物体大幅度运动具有高精度求解能力, 因此其应用越来越广泛。

### 3.1 基本原理

图 1 为 Overset 技术示意图。其中, mesh1 为均匀分布的正交背景网格, mesh2 为机翼网格。物体网格嵌套在背景网格内部, 背景网格在物体壁面内以及壁面附近的网格点将被标记为洞内点而被挖掉, 不参与流场的计算。而在两套网格之间重叠部分的网格点通过插值进行数据交换, 进而实现对流场的模拟。我们对此网格重叠部分的网格进行放大, 如图 2 所示。在机翼网格的最外围我们称为外插值边界, 在这上面的网格点我们称为外边界插值点, 其作用为通过插值的方法从背景网格获取数据, 同时以机翼网格边界点的身份参与机翼网格的计算。其数据传递方向如图中所示。而在背

景网格中，由深色虚线绘制的是其插值边界，其上面的网格点，被称为边界插值点。其作用是通过插值从机翼网格中获取数据并作为背景网格的边界点参与背景网格的计算。数据传递方向如图所示。

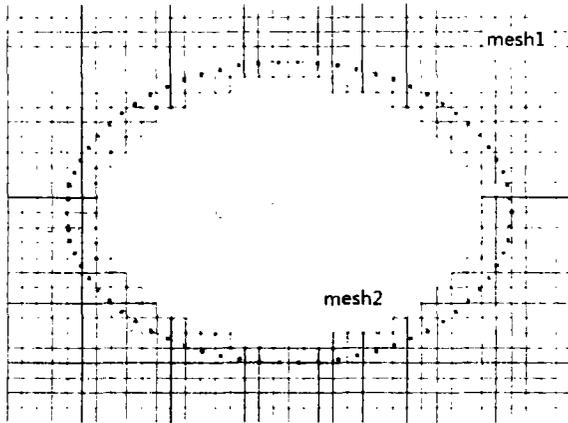


图1 Overset 示意图

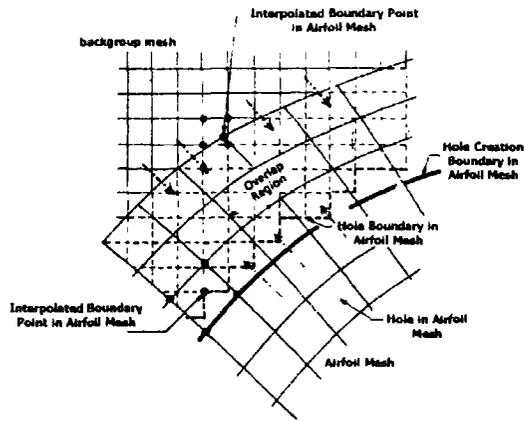


图2 Overset 网格局部放大图

### 3.2 Overset 求解过程

Overset 网格技术主要求解过程有三大步。

第一，物体近壁面网格与背景网格的生成。可以通过商用软件或网格生成代码等完成相互独立且空间重叠的网格。

第二，挖洞过程。以图 1 的机翼网格为例，首先，由于部分背景网格落在机翼内部，因此该部分网格需要被挖掉。其次，由于机翼壁面周围的边界层区域流动较复杂，需要相对精密的网格以保证进行流场的准确性，因此该区域的背景网格也要挖掉。另外，考虑到重叠区域对计算资源的消耗问题，我们通常只保留两层左右的重叠网格即可。

第三，插值过程。该过程是 Overset 技术的关键步骤。首先，求出待插值点与数据提供点之间的插值系数。其次，结合插值系数，待插值点从数据提供点那里获得流场数据，完成数据插值。最后，每个子网格单独求解，待插值点获得插值数据后，作为边界条件参与新的计算，进而实现全场数据计算。

## 4 计算结果与分析

### 4.1 wigley 船体几何模型

本文采用简单的 wigley 数学船型做计算，船型方程可表示为

$$y = \frac{B}{2} \left[ \frac{4x}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right] \left[ 1 - \left( \frac{z}{H} \right)^2 \right] \quad (15)$$

式中：L 为船长，B 为船宽；d 为吃水； $0 \leq x \leq L$ ， $-H \leq z \leq 0$ 。

### 4.2 网格与边界条件

本文计算采用结构化网格，由 C 型船体边界层网格与完全正交的背景网格组成。坐标原点位于船艏垂线与水线的交点，计算域设置为  $-1 \leq x \leq 11$ ， $-1 \leq z \leq 0.25$ ，计算域半宽根据需求由 0.5 渐变到 1.5。具体网格见图 3 与图 4。为保证对自由面的准确捕捉，本文计算网格在  $-0.02 \leq z \leq 0.02$  处对网格进行

了加密。另外，由于本文采用 K- $\omega$ SST 湍流模型，为保证  $y^+ \leq 1$ ，壁面距第一层网格无因次间距取为  $3 \times 10^{-6}$  [17]。

合理的边界条件是正确进行仿真计算的前提。本文采用的边界条件包括壁面、对称面与无穷远边界条件，如图 5 所示。

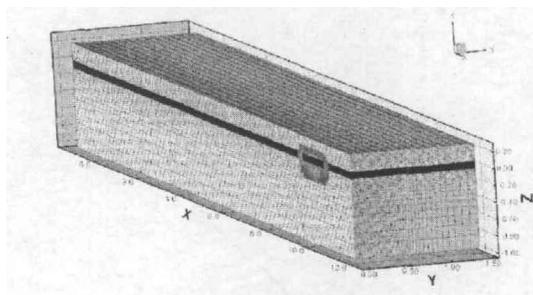


图 3 计算域整体网格

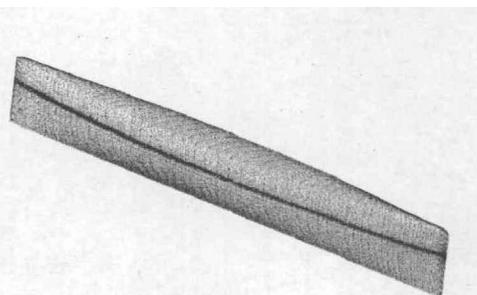


图 4 船舶贴体网格

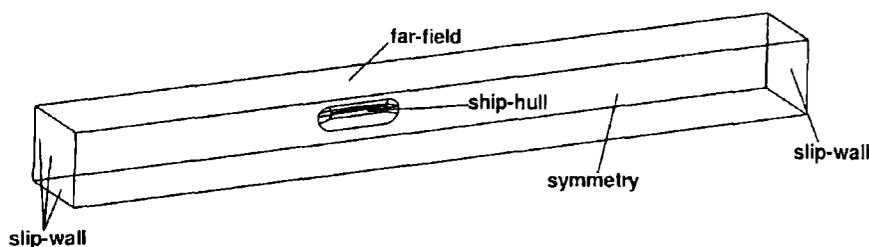


图 5 边界条件设置

### 4.3 Overset 网格依赖性验证

本文结合 Overset 网格技术对 wigley 船型在  $Fr=0.316$  情况下的阻力与自由面波面情况，根据网格在三个方向网格点布置依次根据  $\sqrt{2}$  倍变化的方式选取粗糙、中间、细密三种网格计算了计算收敛性验证，具体细节参数如表 1 中所示。计算过程中选取无因次时间步长为  $t=0.005$  [17]，表 2 给出了三种网格计算得到的总阻力系数结果及其与实验结果的对比情况。图 6 给出了稳定状态时船体表面波高图与试验值的比较。图 7 给出了稳定状态下自由面波高图。

表 1 本文所用网格信息概览

	细密网格 (Fine)	中间网格 (Medium)	粗糙网格 (Coarse)
边界层网格	124x73x213	87x51x151	62x36x107
背景网格	129x72x58	91x51x41	64x36x29
总计	2,913,504	1,045,908	349,790

从表 2 中可以看出三种网格计算得到的总阻力误差都在可接受范围之内。细密网格计算得到的总阻力系数更接近实验值，可能是由于细密的网格捕捉到船体周围的不易捕捉的小涡，使得阻力计算更加准确。从图 6 可以看出三种网格得到的船表波高图与实验值吻合较好。粗网格在船艏与船中处的误差相对较大，通过对网格的加密可以使得计算结果更加接近实验值。从图 7 中可以看出，通过对网格的加密，自由面波峰波谷的等值线更加精细准确，说明 Overset 网格技术用于数值计算具有较高的可靠性。综合考虑计算精度与计算效率，本文将采用中间网格进行计算。

表 2 三种网格的总阻力系数

	总阻力系数计算结果 ( $\times 10^3$ )	总阻力系数实验值 ( $\times 10^3$ )	误差
细密网格 (Fine)	4.79		1.24%
中间网格 (Medium)	4.69	4.85	3.3%
粗糙网格 (Coarse)	4.66		3.9%

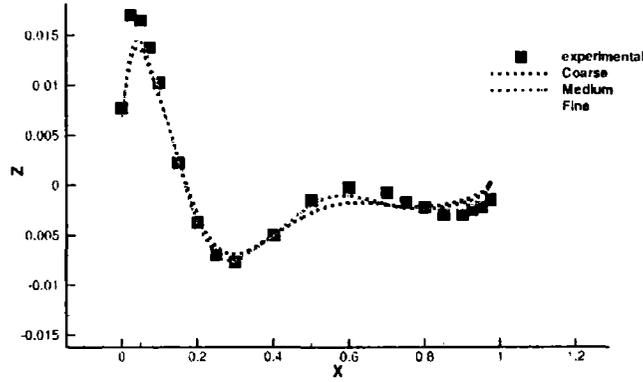


图 6 三种网格计算得到的船体表面波高图

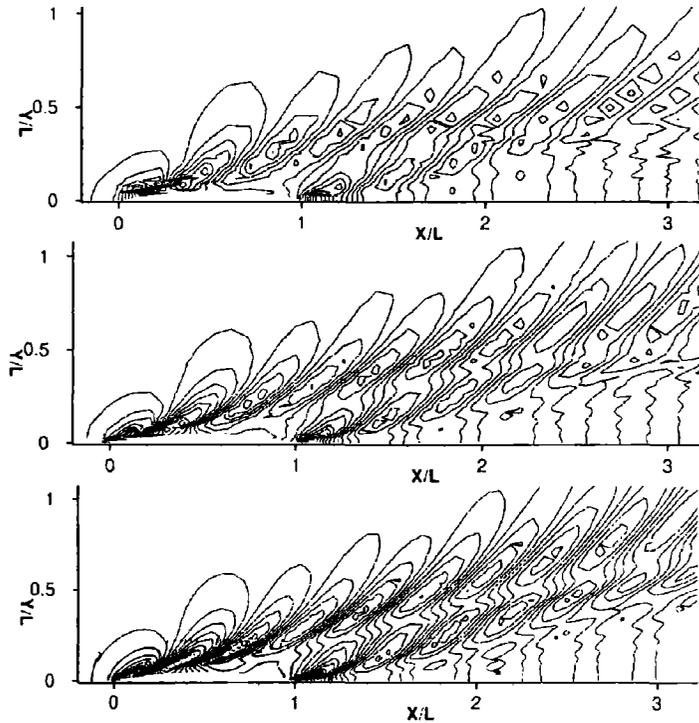


图 7 三种网格计算得到的自由面波高图(自上而下依次为粗糙、中间、细密网格结果)

#### 4.4 结果分析

##### 4.4.1 Overset 网格

Overset 网格技术的工作不仅仅是简单的子网格生成,更重要的是要确定各个子网格之间的拓扑关系,以确定子网格之间的插值关系以及插值系数。因此对于物面的精确捕捉是 Overset 网格技

术一个重要的内容，也是其进行挖洞与插值的基础。图 8 为 Overset 网格技术对船体表面的捕捉效果。从图 8 中可以看出我们采用的 Overset 网格技术对于物体壁面的捕捉效果较好，为我们流体计算提供了可信的前提。wigley 子网格间的插值关系见图 9。从图 9 中我们可以看出 wigley 船体部分从背景网格中被挖掉，在重叠部分通过插值实现流场的数据交换与计算。

图 10 为计算过程中不同时刻船舶随体网格与背景网格的改变情况。从图 10 可以看出，在不同时刻随着船舶位置发生了改变，船舶随体网格始终同船体一起移动，保证了近船舶壁面处网格的精密与正交，既避免了网格重生成带来的计算资源消耗又保证了船体流场求解的精度，而在整个过程中背景网格始终保证不变，保证了全流场网格的均匀正交性，不仅节省了计算资源，同时避免了网格重生成带来的网格扭曲问题。

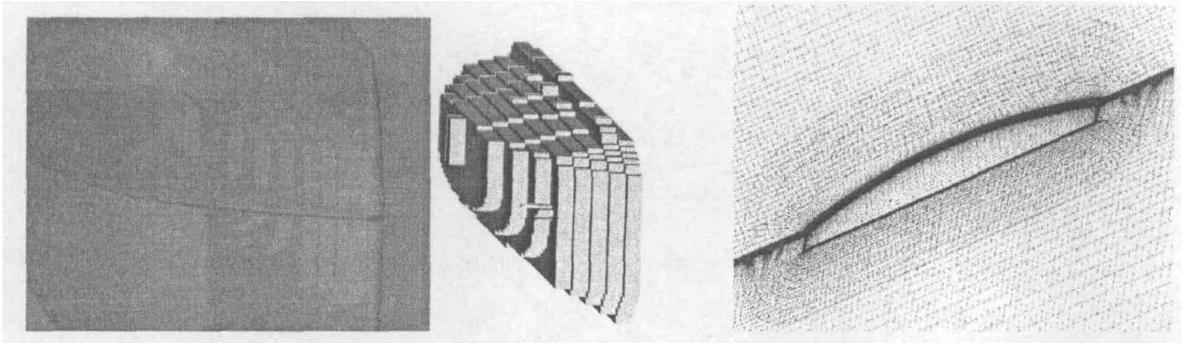


图 8 Overset 网格技术对船体表面的捕捉效果

图 9 Overset 网格插值关系

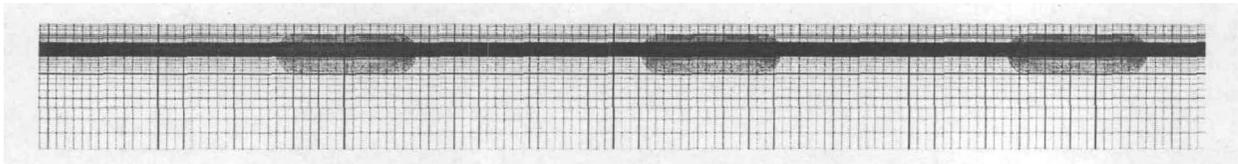


图 10 不同时刻网格运动情况

#### 4.4.2 阻力

为详细研究船舶在狭窄水域中，岸壁宽度对船体静水阻力变化的影响，以及相同岸壁宽度下，不同傅如德数对船体静水阻力变化的影响，本文对傅如德数  $Fr=0.267$ 、 $Fr=0.316$ 、 $Fr=0.40$  三种航速下，船舶分别行使在岸壁半宽  $B=0.5L_{pp}$ 、 $B=0.75L_{pp}$ 、 $B=1.0L_{pp}$ 、 $B=1.5L_{pp}$ （其中  $B$  为岸壁半宽， $L_{pp}$  为船长）四种不同宽度航道中的情况进行了仿真计算。

图 11-14 分别为岸壁半宽  $B=0.5L_{pp}$ 、 $B=0.75L_{pp}$ 、 $B=1.0L_{pp}$ 、 $B=1.5L_{pp}$ （其中  $L_{pp}$  为船长）四种不同宽度航道中，船舶以不同航速航行时的总阻力系数历时曲线。从图 11-14 可以看出船舶在限制水域时，由于受到岸壁的反射作用，船体兴波与岸壁反射波发生叠加，使得船体阻力发生震荡。同一岸壁宽度情况下，随着傅汝德数增大，船舶静水阻力曲线震荡频率与震荡幅度均呈现减小趋势。以  $B=0.5L_{pp}$  为例， $Fr=0.267$  航速下静水阻力较宽阔水域<sup>[18]</sup>震荡幅度达 33%， $Fr=0.4$  时，震荡幅度为 12.5%；相同傅汝德数条件下，随着岸壁宽度减小，船舶受到的静水阻力振幅逐渐增大，以  $Fr=0.4$  为例，岸壁半宽  $B=0.5L_{pp}$  时静水阻力较宽阔水域震荡幅度为 12.5%，岸壁半宽  $B=1.5L_{pp}$  时震动幅度可以忽略；采用 CFD 计算船舶静水阻力时，当  $Fr>0.316$ ，且岸壁宽度大于两倍船长时，由于其静水阻力震荡幅值较小，即可近似作广阔水域处理；当  $Fr$  小于 0.267，且岸壁宽度小于三倍船长时，即要考虑其岸壁效应。

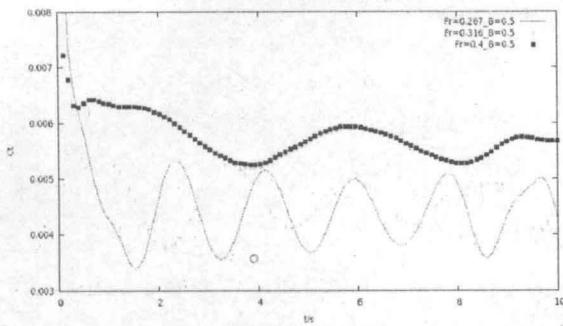


图 11  $B=0.5L_{pp}$ , 不同  $Fr$  总阻力系数历时曲线

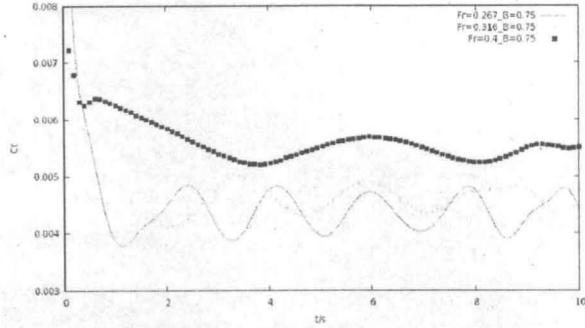


图 12  $B=0.75L_{pp}$ , 不同  $Fr$  总阻力系数历时曲线

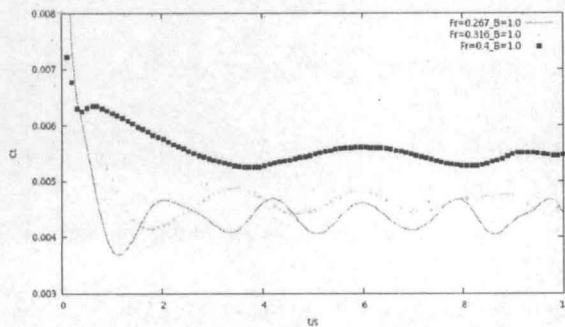


图 13  $B=1.0L_{pp}$ , 不同  $Fr$  总阻力系数历时曲线

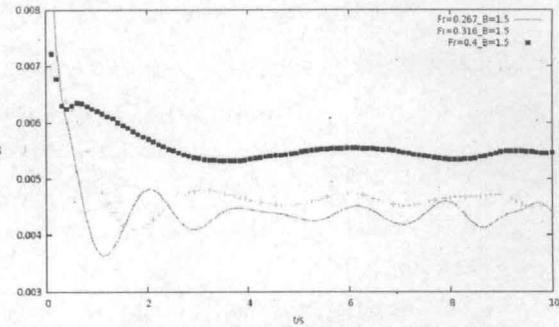


图 14  $B=1.5L_{pp}$ , 不同  $Fr$  总阻力系数历时曲线

#### 4.4.3 自由面波形

随着岸壁宽度逐渐降低, 船体兴波与岸壁反射波发生叠加, 使得流场进一步紊乱。图 15 与图 16 分别为  $Fr=0.4$  航速下,  $B=0.5L_{pp}$  与  $B=1.5L_{pp}$  宽度下的自由面波形图, 从图 15 与图 16 可以看出由于壁面影响,  $B=0.5L_{pp}$  岸壁宽度下, 船舶兴波发生了明显发射。

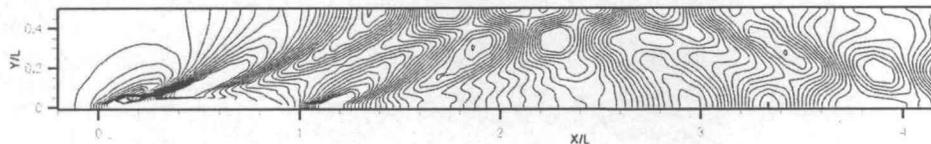


图 15  $Fr=0.4$ ,  $B=0.5L_{pp}$  自由面波形图

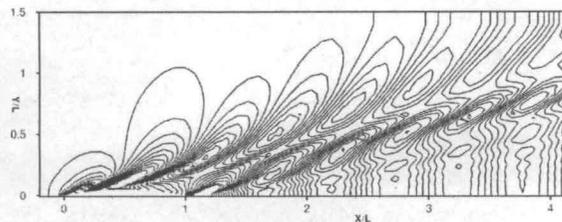


图 16  $Fr=0.4$ ,  $B=1.5L_{pp}$  自由面波形图

## 5 结论与展望

本文结合 Overset 网格技术, 通过对不同航速下船舶在不同岸壁宽度环境中运动仿真, 完成了限制水域船舶受力情况预估。结果表明 Overset 网格技术在处理船舶大幅度运动时, 具有无可比拟的优势; 船舶在限制水域行驶时, 由于受到岸壁的反射作用, 船体兴波与岸壁反射波发生叠加, 使得船体阻力发生震荡; 同一岸壁宽度情况下, 随着傅汝德数增大, 船舶静水阻力曲线震荡频率与震荡幅度均呈现减小趋势。相同傅汝德数条件下, 随着岸壁宽度减小, 船舶受到的静水阻力振幅逐渐

增大。

由于本次计算主要关心船舶在限制水域的静水阻力与岸壁宽度以及傅如德数的关系，所以并未放开船舶自由度，因此与实际船舶在对称狭窄航道中的运动有些不同，下一步的计算将考虑放开船舶升沉与纵摇，以进一步研究船舶在对称狭窄航道航行时的运动与受力情况。

## 6 致谢

本文工作得到国家自然科学基金项目(Grant No. 11072154), 海洋工程国家重点实验室自主研究课题基金 (Grant No. GKZD010059)和上海东方学者人才计划基金。在此一并表示感谢。

### 参考文献:

- [1] Norbin N.H., BANK EFFECTS ON A SHIP MOVING THROUGH A SHORT DREDGED CHANNEL. Symposium on Naval Hydrodynamics, Cambridge, MA, USA, 1974, pp.71-87.
- [2] Renilson M R, Munro A. THE EFFECT OF SHAPE AND ANGLE ON BANK INTERACTION[J]. Naval Architect, 1989.
- [3] Ch'ng P W, Doctors L J, Renilson M R. A method of calculating the ship-bank interaction forces and moments in restricted water[J]. 1993.
- [4] Duffy J T. The effect of channel geometry on ship operation in a port[C]//30th PIANC-AIPCN Congress, Sydney, Australia. 2002.
- [5] Miao Q, Xia J, Chwang A, et al. Numerical study of bank effects on a ship travelling in a channel[C]. 8th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. 2003.
- [6] Lo D C, Su D T, Chen J M. Application of computational fluid dynamics simulations to the analysis of bank effects in restricted waters[J]. Journal of Navigation, 2009, 62(03): 477-491.
- [7] 姚建喜, 邹建. 船舶近岸航行岸壁效应数值研究[J]. 武汉理工大学学报 (交通科学与工程版), 2011, 3: 002.
- [8] 孔定新. 船舶在受限水域岸壁效应的研究[J]. 中国水运, 2013 (4): 12-14.
- [9] Paterson E G, Wilson R V, Stern F. General-purpose parallel unsteady RANS ship hydrodynamics code: CFDShip-Iowa[R]. IOWA INST OF HYDRAULIC RESEARCH IOWA CITY, 2003.
- [10] Menter F R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications[J]. AIAA journal, 1994, 32(8): 1598-1605.
- [11] Carrica P M, Wilson R V, Stern F. An unsteady single - phase level set method for viscous free surface flows[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, 53(2): 229-256.
- [12] Menter F R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications[J]. AIAA journal, 1994, 32(8): 1598-1605.
- [13] Sethian J A. Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science[M]. Cambridge university press, 1999.
- [14] Peng D, Merriman B, Osher S, et al. A PDE-based fast local level set method[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 155(2): 410-438.
- [15] Zhang Z, Zhao F, Li B. Numerical calculation of viscous free-surface flow about ship hull[J]. Journal of ship mechanics, 2002, 6(6): 10-17.
- [16] SUHS N E, ROGERS S E, DIETZ W E. PEGASUS 5: An automated pre-processor for overset—gnd CFD[R]. AIAA — 2002—3186, 2002.
- [17] 马娟, 万德成. 典型标准水面船型阻力和黏性流场的计算[J]. 中国科学: 物理学, 力学, 天文学, 2011, 41(2): 178-193.
- [18] Adachi H, Hinatsu M, Kamikura T. ON EXPERIMENTAL SEPARATION OF SHIP RESISTANCE FOR THIN SHIP[J]. 1982.